Auswertung des Versuches Holographie

Andreas Buhr

9. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Formales **3**

2 Überblick über den Versuch **4**

3 Grundlagen der Holographie **4**
3.1 Idee und Prinzip 4
3.2 Abbildung eines Punktes 4
3.3 Kontrastfunktion 6
3.4 Moden im Laser 6
3.5 Kontrastfunktion bei mehreren Moden im Laser 8

4 Durchführung des Versuches **9**
4.1 Idee 9
4.2 Aufbau 9
4.3 Aufnahme des Hologrammes eines Punktes: 10
4.4 Messwerte 11

5 Auswertung der Ergebnisse **12**
5.1 Diagramme 12
5.2 Abweichungen 12
5.3 Verbesserungsmöglichkeiten 12
5.4 Würdigung der Ergebnisse 13

1 Formales

Versuch: Holographie
Versuchsteilnehmer: Andreas Buhr und Markus Fasel
Datum: 19. 12. 2005
Betreuer: Dr. Victor Petrov

2 Überblick über den Versuch

In diesem Versuch sollen zwei Hologramme aufgenommen werden. Zum einen ein Hologramm einer punktförmigen Lichtquelle, um damit die fundamentalen Zusammenhänge der Holographie zu untersuchen. Zum anderen soll ein Hologramm eines dreidimensionalen Objektes aufgenommen werden.

Die Grundlagen der Holographie werden in diesem Zusammenhang eingehend beschrieben. Genau untersuchen wir, was passiert, wenn sich mehrere Wellenfronten überlagern, welches Interferenzmuster entsteht und wie anhand von diesem Interferenzmuster die Original-Wellenfront wiederhergestellt werden kann.

In diesem Zusammenhang gehen wir auf die Bandbreite und eventuellen mehr-Moden Betrieb des Lasers ein, der durch die Dopplerverbreiterung des Emmissionsspektrums hervorgerufen wird. Wir untersuchen, wie die Kontrastfunktion hiervon beeinflusst wird.

3 Grundlagen der Holographie

3.1 Idee und Prinzip

Im Gegensatz zur Fotographie, bei der auf dem Film „gespeichert“ wird, welcher Punkt des Objektes welche Arten von Licht aussendet, möchte man bei der Holographie nicht Informationen über das Objekt selbst speichern, sondern man hält die Information über die vom Objekt ausgesendeten Wellenfront fest, um diese Wellenfront später zu rekonstruieren. Um dies zu erreichen, überlagert man die vom Objekt ausgesendete Wellenfront mit einer Referenzwelle. Um in dieser Überlagerung einen Informationsgehalt zu haben, ist es von entscheidender Bedeutung, dass die vom Objekt kommende Wellenfront und die Referenzwelle zeitlich und räumlich perfekt kohärent sind. In der Praxis erreicht man dies dadurch, dass man für die Beleuchtung des Objektes und für die Referenzwelle zwei Teile eines von einem schmalbandigem Laser ausgehendes Strahles verwendet, die durch einen Strahlteiler getrennt wurden. Damit ist die Kohärenz weitgehend sichergestellt.

Die Notwendigkeit von kohärentem Licht erklärt, warum die Erstellung eines Hologrammes seit der Verfügbarkeit von Lasern deutlich einfacher geworden ist, auch wenn die Technik des Hologrammes schon lange davor bekannt war.

3.2 Abbildung eines Punktes

In der theoretischen Beschreibung eines Hologrammes eines komplexeren Objektes kann man sich dieses komplexe Hologramm denken als eine Überlagerung von Hologrammen von einzelnen Punkten. Deshalb ist es sinnvoll, sich über die Beschaffenheit eines Hologrammes eines einzelnen Punktes klar zu werden.

Ein einzelner Punkt sendet (idealisiert) eine perfekte Kugelwelle aus. Diese perfekte Kugelwelle wird mit der Referenzwelle, in zur theoretischen Beschreibung im einfachsten Fall eine perfekte ebene Welle ist, überlagert. Auf jeden Punkt des Filmes, der das Hologramm aufnehmen soll, treffen also zwei Wellen auf, überall mit einem unterschiedlichen Winkel zueinander. Es entstehen Interferenzmuster.

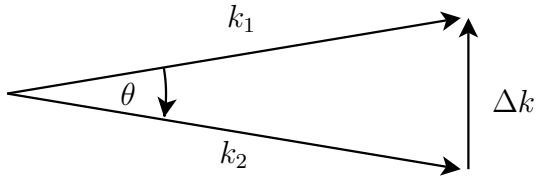
Zum Verständnis dieser Interferenzmuster muss man sich zunächst überlegen, was passiert, wenn zwei kohärente Wellen, die aus unterschiedlichen Richtungen kommen, in einer Ebene miteinander interferieren.

Gitterkonstante des Hologrammes

Zur Herleitung des Interferenzmusters nehmen wir zunächst den einfachsten Fall an:

Zwei ebene Wellen, deren Ausbreitungsrichtungen zueinander den Winkel θ haben, interferieren.

Dazu gehe ich davon aus, dass das Interferenzmuster mit der Differenz der Wellenvektoren der beiden einfallenden ebenen Wellen moduliert ist:



Dabei ist k_1 der Wellenvektor der ersten einfallenden Welle, k_2 der Wellenvektor der zweiten einfallenden Welle, und Δk der Wellenvektor des resultierenden Interferenzmusters. Das resultierende Interferenzmuster ist also sinusförmig. Dabei gilt für die Gitterkonstante d:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{d}$$

. Die Gitterkonstante d lässt sich jetzt einfach über Winkelbeziehungen herleiten:

$$\frac{\frac{|\Delta k|}{2}}{k_2} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \frac{|\Delta k|}{2} = k_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{2}$$

$$\Rightarrow |\Delta k| = 2k_2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{d} = 2\frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{5}$$

Damit lässt sich leicht berechnen, wie das Interferenzmuster von einer ebenen Welle mit einer Kugelwelle aussieht:

Nennt man den Abstand von der Quelle der Kugelwelle zum Schirm D, den Abstand des betrachteten Punktes auf dem Schirm zur optischen Achse (der Achse, auf der die Punktquelle steht) r und rechnet mit der Kleinwinkelnäherung

$$\tan\alpha = \sin\alpha = \alpha$$

, so ergibt sich:

$$\theta \approx \frac{r}{D} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2} \approx \frac{r}{2D} \tag{7}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \approx \frac{\lambda}{2}\frac{2D}{r} = \frac{\lambda D}{r} \tag{8}$$

Es ergibt sich also ein ringförmiges Muster, wobei der Ringabstand nach aussen hin reziprok zum Radius abnimmt.

Dies nennt man die Fresnelsche Zonenplatte. Bestrahlt man sie mit einer perfekten ebenen Welle, entsteht ein reelles Bild der Punktquelle: das Licht wird zu einem Punkt hinter der Zonenplatte hingelenkt. Und es entsteht ein virtuelles Bild: Das Licht wird hinter der Zonenplatte so nach aussen gelenkt, als käme es von einem Punkt vor der Platte.

Man nennt dies die 1. bzw. -1. Beugungsordnung. Ist das Hologramm perfekt (das heißt, der Film wurde nicht über oder unterbelichtet und die Helligkeitsverteilung auf dem Film entspricht wirklich einer sinus-Welle) existieren ausser diesen beiden Beugungsordnungen keine weiteren. In der praxis ist dies jedoch nicht zu erreichen, und es entstehen immer auch höhere Beugungsordnungen.

3.3 Kontrastfunktion

In der Theorie funktioniert das Interferrieren der beiden Wellen (der Wellenfront vom Objekt und der Referenzwelle) perfekt.

In der Praxis ist das aus verschiednen Gründen nicht so. In erster Linie stört, dass der Laser eine gewisse Bandbreite hat und damit mehrere Farben gleichzeitig abstrahlt.

Den erreichbaren Kontrast misst man mit der Kontrastfunktion. Diese ist definiert als

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{9}$$

Wobei I_{max} und I_{min} die maximal mögliche bzw. die minimal mögliche Intensität sind.

Diese Größe K ist dadurch, dass der Laser „multimode“ läuft, nicht optimal ($\neq 1$).

3.4 Moden im Laser

Betrachten wir also, wieviel Moden im Laser schwingen können.

Eigentlich haben die im He-Ne Laser befindlichen Atome eine schmalbandige Characteristik. Das heißt, dass sie nur eine Wellenlänge gut verstärken. Durch ihre thermische Bewegung kommt es aber zu einer Dopplerverbreiterung des (eigentlich sehr schmalen) Bandes von Frequenzen, die verstärkt werden.

Die Geschwindigkeit der Moleküle ist Boltzmann-Verteilt. Wir nehmen hier eine eindimensionale Boltzmann-Verteilung an, da nur die Bewegungsrichtung in Richtung der optischen Achse relevant ist.

$$p(v) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \tag{10}$$

Jeder Geschwindigkeit kann man eine Frequenz zuordnen. Ist f_1 die eigentlich gewünschte Frequenz und f_2 die verschobene Frequenz, so gilt nach Doppler:

$$f_2 = f_1 \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \tag{11}$$

Da wir jeder Geschwindigkeit eine Frequenz zuordnen wollen, um von der Geschwindigkeitsverteilung auf eine Frequenzverteilung zu kommen, lösen wir dies nach v auf:

$$v = c\left(\frac{f_1}{f_2} - 1\right) \tag{12}$$

Damit kommt man von der Geschwindigkeitsverteilung zu einer Frequenzverteilung:

$$p(f_2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-\frac{mc^2}{2k_B T}\left(\frac{f_1}{f_2} - 1\right)} \tag{13}$$

Diese Verteilung hat eine gewisse Breite. Wir nehmen an, dass alle Moden des Lasers, die innerhalb der Halbwertsbreite liegen, schwingen können. Wir suchen daher die „FWHM“, Full Width at Half Maximum, und daher:

$$\frac{1}{2} p(f_1) = p(f_1 + \frac{1}{2}\Delta f) \tag{14}$$

Hier setzen wir die obige Formel ein, lösen nach Δf auf und kommen auf:

$$\Delta f = \frac{2 f_1}{1 + \sqrt{\frac{mc^2}{2k_B T \ln 2}}} \tag{15}$$

Setzt man hier die Daten des Lasers ein ($\lambda = 633nm, f_1 = 4,74 \cdot 10^{14} Hz, T = 1000K, m = 20,28u$), so erhält man

$$\Delta f = 2,,388GHz \tag{16}$$

Es kann jedoch nicht jede Farbe im Laser schwingen. Die sich im Laser entwickelnde stehende Welle muss an den Enden des Lasers Knoten haben. Es muss also eine ganze Anzahl von Wellenbäuchen in den Resonator des Lasers passen. Ein Wellenbauch hat die Länge einer halben Wellenlänge. Damit ergibt sich ein Modenabstand von

$$\Delta f' = \frac{c}{2L} \tag{17}$$

mit L, der Länge des Resonators. Der Modenabstand ist mit $L = 22cm$:

$$\Delta f' = 681MHz$$

. Damit sind im Laser 3 - 4 Moden schwingfähig.

3.5 Kontrastfunktion bei mehreren Moden im Laser

Diese mehreren Moden führen dazu, dass der beobachtbare Kontrast abnimmt.

Die Frage ist nun, wie nimmt er ab?

Dazu betrachten wir die Intensität an einer Stelle der Fotoplatte. Auf der Fotoplatte treffen die beiden Moden des Referenzstrahles auf sowie beide Moden mit einem Gangunterschied, vom Objekt.

Das E-Feld auf der Fotoplatte ist also:

$$E_{ges} = E_{ref1} + E_{ref2} + E_{obj1} + E_{obj2} \tag{18}$$

$$= A\left(\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right) + \cos\left(\omega_1 t + k_1 x\right) + \cos\left(\omega_2 t + k_2 x\right)\right) \tag{19}$$

Zur Berechnung der Intensität muss man dies quadrieren und zeitlich mitteln.

Mit ein paar Additionstheoremen ist dies recht einfach:

Mit:

$$\cos\left(\alpha\right)\cos\left(\beta\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right) + \cos\left(\alpha+\beta\right)\right] \tag{20}$$

$$\cos\left(\alpha\right) + \cos\left(\beta\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{21}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
I = E^2 &= A^2\left(\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right) + \cos\left(\omega_1 t + k_1 x\right) + \cos\left(\omega_2 t + k_2 x\right)\right)^2 && (22)\\
&= A^2\left(\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_1 t + k_1 x\right) + \cos\left(\omega_2 t\right) + \cos\left(\omega_2 t + k_2 x\right)\right)^2 && (23)\\
&= A^2\left(2\cos\left(\frac{2\omega_1 t + k_1 x}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1 x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{2\omega_2 t + k_2 x}{2}\right)\cos\left(\frac{k_2 x}{2}\right)\right)^2 && (24)\\
&= A^2\Big(4\cos^2\left(\frac{2\omega_1 t + k_1 x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{k_1 x}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{2\omega_2 t + k_2 x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{k_2 x}{2}\right) + \\
&\quad 8\cos\left(\frac{2\omega_1 t + k_1 x}{2}\right)\cos\left(\frac{2\omega_2 t + k_2 x}{2}\right)\cos\left(k_1 x\right)\cos\left(k_2 x\right)\Big)
\end{aligned}$$

Dies muss über die Zeit gemittelt werden. Damit fällt der dritte, oszillierende Term weg. Die beiden anderen Terme forme ich mittels der Additionstheoreme um:

$$\langle I\rangle_t / A^2 = 4\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\omega_1 t + k_1 x\right) + 1\right]\frac{1}{2}\left[\cos\left(k_1 x\right) + 1\right] + 4\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\omega_2 t + k_2 x\right) + 1\right]\frac{1}{2}\left[\cos\left(k_2 x\right) + 1\right] \tag{25}$$

Hier lässt man nun wieder die in der Zeit oszillierenden Terme weg. Es bleibt:

$$\begin{aligned}
&= \left[\cos\left(k_1 x\right) + 1\right] + \left[\cos\left(k_2 x\right) + 1\right] && (26)\\
&= 2 + \cos\left(k_1 x\right) + \cos\left(k_2 x\right) && (27)\\
&= 2 + 2\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x\right) && (28)
\end{aligned}$$

Dabei ist der Term mit $k_1 - k_2$ derjenige, der den möglichen Kontrast begrenzt.

Mit der Formel für die Kontrastfunktion:

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \tag{29}$$

ergibt sich:

$$K = \left| \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \right| \tag{30}$$

Setzt man hier nun den Modenabstand im laserresonator ein und löst nach x auf, ergibt sich:

$$x = 2nL \tag{31}$$

d.h., ein maximaler Kontrast ergibt sich für ein Vielfaches der Resonatorlänge.

In unserem Versuch ist der Gangunterschied nur wenige cm groß. Der Laserresonator ist jedoch $22cm$ lang. Wir können daher auch bei Mehrmodenbetrieb einen guten Kontrast erwarten.

4 Durchführung des Versuches

4.1 Idee

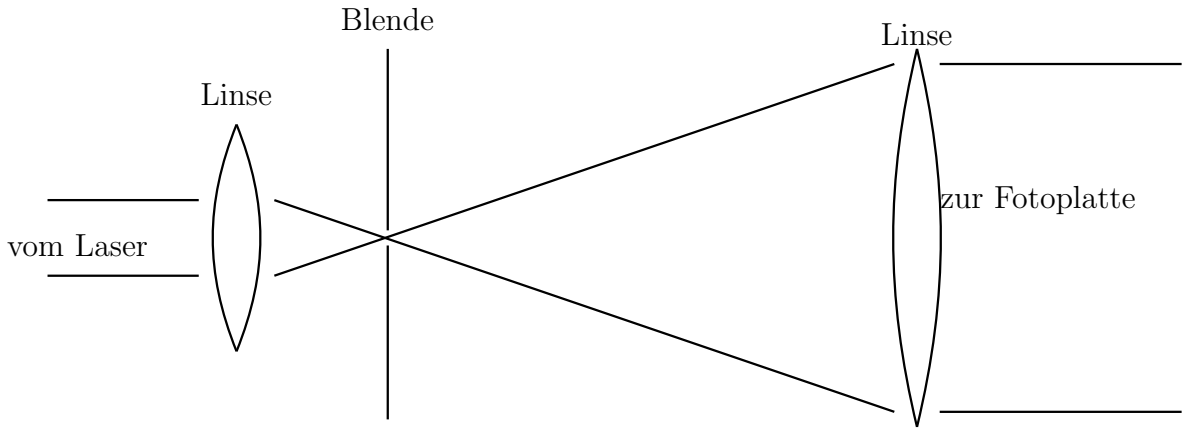
Eine Holographische Aufnahme soll in der einfachsten Form aufgenommen werden. Die Punktquelle wird daher mit einer Linse „simuliert“. Eine Punktquelle sendet eine Kugelwelle aus. Eine ebene Welle, die durch eine Sammellinse geschickt wird, ergibt nach dem Brennpunkt der Linse auch eine Kugelwelle. Wir wollen also den Brennpunkt einer Linse holographisch aufnehmen.

4.2 Aufbau

Der Referenzstrahl und der Objektstrahl entstehen aus einem einzigen Laserstrahl. Um eine möglichst perfekte ebene Welle zu erhalten, wird ein Raumfilter eingesetzt:

Raumfilter

Im Raumfilter wird das gesamte Licht auf einen kleinen Punkt fokussiert, dort durch eine kleine Blende geschickt und hinter der Blende nur die erste Beugungsordnung wieder in einen zur optischen Achse parallelen Strahl gelenkt:



Anzahl der Beugungsordnungen

Hinter der Lochblende entsteht ein characteristisches Beugungsmuster. Zur Abschätzung der Anzahl der Beugungsordnungen, die auf die zweite Linse fallen, verwendet man:

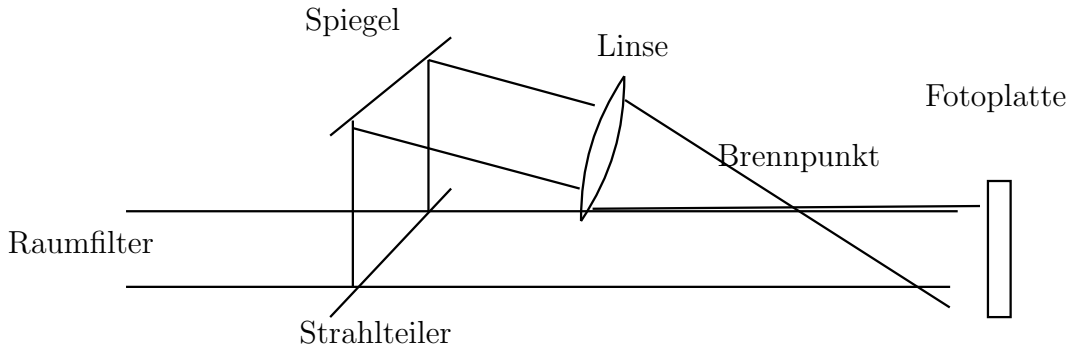
$$\sin(\alpha) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + D^2}} \tag{32}$$

Dabei ist d die Größe des Loches, D der Abstand zwischen dem Loch und der nächsten Linse und r der Radius dieser Linse.

Mit $d = 5,4\mu m$, $D = 25cm$ und $r = 1,75cm$ erhält man daraus $n = 0$. Man hat also nur das Hauptmaximum nullter Ordnung.

4.3 Aufnahme des Hologrammes eines Punktes:

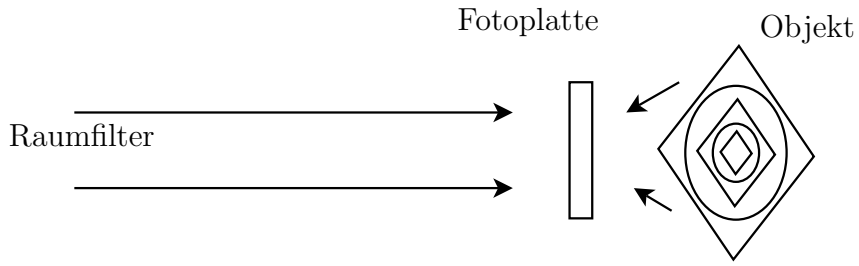
Wir nehmen wir schon beschrieben ein Hologramm eines Punktes auf. Wir erwarten auf der Fotoplatte das Muster einer Fresnelschen Zonenplatte (einen Ausschnitt daraus).



Der Abstand des Brennpunktes zur Fotoplatte ist dabei $z_G = 25cm$.

Aufnahme eines Hologrammes eines 3D-Objektes

Als zweites haben wir ein Hologramm eines realen Objektes aufgenommen. Dazu haben wir den einfachstmöglichen Aufbau verwendet:



Dieses Hologramm haben wir später rekonstruiert. Das Objekt war zu erkennen. Es wurden aber keine weiteren Messungen an diesem Hologramm vorgenommen.

Rekonstruktion des Punktes

Das Hologramm des Punktes wollen wir mit einer Kugelwelle rekonstruieren, um dabei das holographische Abbildungsgesetz zu verifizieren:

$$\left(\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_C}\right) = \pm\left(\frac{1}{z_G} - \frac{1}{z_R}\right) \tag{33}$$

Wir hatten als Referenzwelle eine Ebene Welle ($z_R = \infty$). Damit vereinfacht sich dies zu:

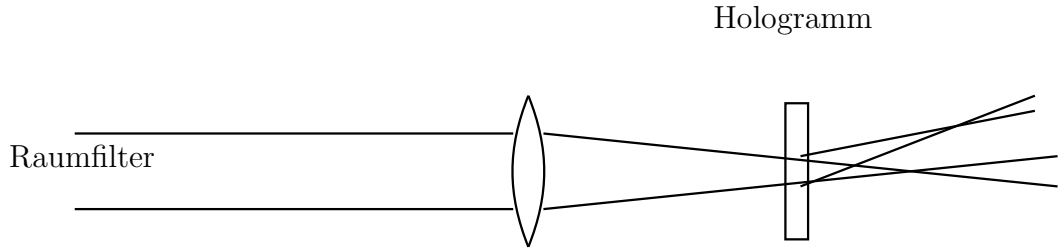
$$\left(\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_C}\right) = \pm\left(\frac{1}{z_G}\right) \tag{34}$$

z_G ist der Abstand vom Brennpunkt der Linse bei der Aufnahme des Hologrammes zur Fotoplatte und damit ist $z_G = -25cm$.

Zu prüfen ist jetzt also der Zusammenhang zwischen z_C und z_B.

4.4 Messwerte

Das Hologramm wurde mit einer Kugelwelle entsprechend der Skizze rekonstruiert:



Aufgenommen wurden folgende Werte:

d/cm	z_C/cm	z_B/cm	$z_{B,theo}/cm$
44,5	5,5	6,6	4,51
40	10	7,2	7,14
36	14	9,5	8,97
32	18	11,1	10,47
28	22	12,1	11,70
24	26	13,5	12,75
20	30	14,9	13,64
16	34	15,5	14,41
12	38	16	15,08
8	42	16,7	15,67
4	46	17	16,20

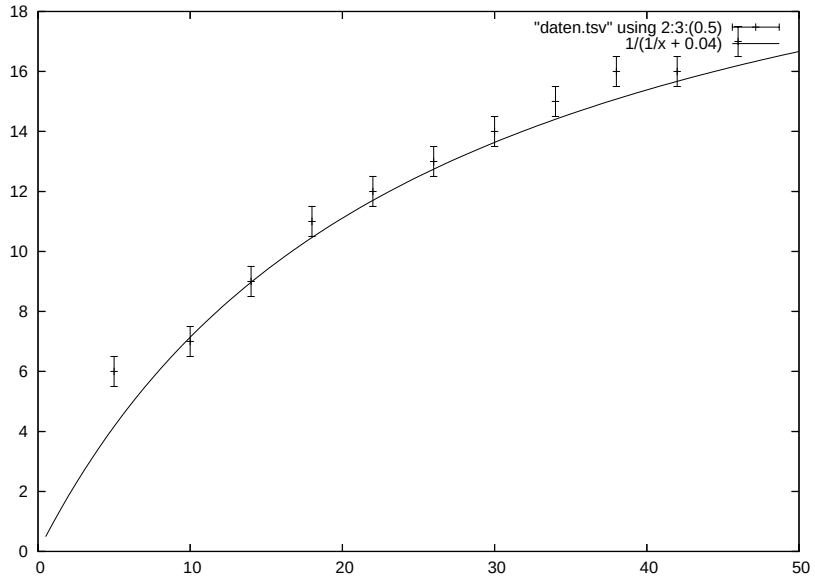
Dabei ist d der Abstand der Linse zum Hologramm.
Die theoretisch erwarteten Werte sind zum Vergleich mit angegeben.

5 Auswertung der Ergebnisse

5.1 Diagramme

Zum Vergleich der gemessenen Werte mit der Theorie ist hier z_B über z_C aufgetragen. Die durchgezogene Linie entspricht

$$z_B = \frac{1}{\frac{1}{z_C} + \frac{1}{25cm}} \tag{35}$$



5.2 Abweichungen

Es war nicht einfach, bei der Messung Präzision zu erreichen. Gefunden werden musste der Brennpunkt von einem ohnehin schon kleinen Strahl.

Trotz dieser Schwierigkeiten ist die Messung recht genau geworden. Die Abweichungen sind meist kleiner als 0,5cm. Zum ersten Messwert muss gesagt werden, dass es nicht möglich war, den Schirm näher an das Hologramm heran zu schieben. Es war also nicht möglich, Werte kleiner als 6 cm zu messen. Das erklärt die Abweichung des Wertes für $z_C = 5,5cm$.

5.3 Verbesserungsmöglichkeiten

Zur Erhöhung der Präzision sehe ich im Wesentlichen zwei möglichkeiten:

- Die Abstände genauer vermessen:
  Wir haben die Abstände zwischen den optischen Geräten gemessen, indem wir einen Zollstock daneben gehalten haben. Fehler sind dabei vorprogrammiert. Exakte Marken an den Geräten, an denen man einen Messschieber anlegen kann und ein großer Messschieber würden hier eine Verbesserung darstellen.

- Brennpunkt genauer finden:
  Wir haben zur Bestimmung des Brennpunktes einen Schirm bewegt, und abgeschätzt, wann der Strahl am kleinsten war. Hier könnte man den Strahl entweder mit einem Teleskop vergrößern, oder auf elektronische Hilfsmittel zurückgreifen, um den Radius des Strahles zu bestimmen.

5.4 Würdigung der Ergebnisse

Trotz des simplen Aufbaus und der einfachen Mittel war es hier möglich, das Faszinierende Phänomen der Holographie zu betrachten und in einfachen zügen quantitativ zu beschreiben. Bei der Holographie wird sonst trockener theoretischer Stoff fassbar und beobachtbar, was einen ganz besonderen Reiz ausmacht.

Die Grundgleichung der Holographie, die die Bildweite, die Gegenstandsweite und die Beschaffenheit der Referenz- bzw. Rekonstruktionswelle miteinander verbindet, konnte bestätigt werden.

Impressum	
Autor:	Andreas Buhr, Karlstraße 18, D-63225 Langen
Satz:	LaTeX
E-Mail	andreas at andreasbuhr.de
Web	www.andreasbuhr.de