Auswertung des Versuches
Resonanzverhalten nichtlinearer Oszillatoren

Andreas Buhr, Matrikelnummer 1229903

23. Juni 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Formales **3**

2 Überblick über den Versuch **4**

3 Grundlagen **4**
3.1 Resonanz 4
3.2 Hysterese 4
3.3 Nichtlineare Dynamik 4
3.4 Bifurkation,Chaos,Attraktoren 5
3.5 Lyapunov Exponenten 5
3.6 Fraktale Dimension 5

4 Versuchsdurchführung **6**
4.1 Versuchsaufbau 6
4.2 Vermessung von Resonanzkurven 6
4.3 Betrachtung der Attraktoren im Phasenraum 7
4.4 Bifurkationsdiagramme und schnelle Resonanzmessung 14
4.5 Bifurkationsdiagramm und Phasendiagramm 15

1 Formales

Versuch: Resonanzverhalten nichtlinearer Oszillatoren
Versuchsteilnehmer: Andreas Buhr und Markus Fasel
Datum: 12. 06. 2006
Betreuer: Dr. Joachim Holzfuss

2 Überblick über den Versuch

Ziel dieses Versuches ist es, mit Hilfe eines nichtlinearen elektronischen Oszillators einen Einblick in das Verhalten nichtlinearer Systeme zu erhalten und einige Aspekte des deterministischen Chaos zu betrachten.

3 Grundlagen

3.1 Resonanz

Oszillatoren haben eine Resonanzfrequenz, die meist in der Nähe der Eigenfrequenz ist. Bei der Resonanzfrequenz kommt es zu einem Phasenunterschied zwischen Anregung und Schwingung von $\pi/2$, so dass durch die Anregung immer weiter Energie in das System geführt wird, bis entweder die Reibung (Dissipation) im Resonator die zugeführte Leistung verschlingt oder es zur Zerstörung des Resonators kommt (Resonanzkatastrophe).

In linearen Systemen (Resonatoren mit harmonischem Potential) ist die Eigen- bzw. Resonanzfrequenz nicht von der Amplitude abhängig. Dies ist bei nichtlinearen Systemen anders. Bei nichtlinearen Systemen unterscheidet man zwischen Systemen, bei denen das Potential flacher verläuft als beim harmonischen Fall. Diese nennt man „weiche“ Potentiale. Im Gegensatz dazu nennt man Potentiale, die steiler verlaufen als das harmonische Potential, „harte“ Potentiale. Bei Systemen mit weichem Potential nimmt die Resonanzfrequenz mit steigender Amplitude ab, bei Systemen mit hartem Potential nimmt die Resonanzfrequenz mit steigender Amplitude zu.

Dies führt bei weichen Resonatoren zu einer „Hysterese“

3.2 Hysterese

Eine Hysterese beschreibt den Fall, in dem der Zustand eines Systems nicht nur von einem Parameter abhängt, sondern auch von dem Verlauf des Parameters in der Vergangenheit. Also, auf welchem Wege der Parameter seinen aktuellen Wert erreicht hat.

Nähert man sich bei einem weichen Resonator von hohen Frequenzen her der Resonanzfrequenz, so nimmt die Amplitude beim Absenken der Frequenz zu. Dadurch sinkt auch die Resonanzfrequenz ab. Es kommt also dazu, dass man beim Absenken der Frequenz die Resonanzfrequenz mit absenkt.

Nähert man sich dagegen von niedrigen Frequenzen, so liegt die Resonanzfrequenz bei höheren Frequenzen. Es entsteht also ein Frequenzbereich, in dem das System entweder mit hoher Amplitude oberhalb der Resonanzfrequenz oder mit kleiner Amplitude unterhalb der Resonanzfrequenz schwingen kann.

3.3 Nichtlineare Dynamik

Zur analytischen Analyse von nichtlinearen Systemen gibt es einige Standartfälle. Es gibt die Differentialgleichungen:

$\ddot{x} + d\dot{x} + x = a\cos(\omega t)$	harmonischer Oszillator
$\ddot{x} + d\dot{x} + x + x^3 = a\cos(\omega t)$	Duffing Oszillator
$\ddot{x} + d\dot{x} + e^x - 1 = a\cos(\omega t)$	Toda Oszillator
$\ddot{x} + d(x^2 - 1)\dot{x} + x = a\cos(\omega t)$	Van-der-Pol Oszillator

Das in diesem Versuch untersuchte System kann teilweise mit der Toda-Differentialgleichung verstanden werden.

3.4 Bifurkation,Chaos,Attraktoren

Deterministisches Chaos entsteht in Systemen, in denen selbst kleinste Änderungen der Anfangsbedingungen große Auswirkungen im Ergebnis haben. Da es nicht möglich ist, die Anfangsbedingungen beliebig genau zu bestimmen, ist es nicht möglich, langreichweitige Vorraussagen über das Verhalten des Systems zu machen. Um trotzdem das Verhalten eines chaotischen Systems zu untersuchen, analysiert man den Weg im Phasenraum. Man kann eine Strömung im Phasenraum definieren und analysieren, welche das System durch den Phasenraum treibt. Ist die Divergenz in dieser Strömung irgendwo negativ, können sich Attraktoren ausbilden. Das sind Pfade im Phasenraum, denen sich das System annähert, wenn es in ihre Nähe kommt. Solche Attraktoren können entweder ein Punkt sein, oder ein Pfad, oder sogenannte „seltsame Attraktoren“. Diese sind in sich noch chaotisch, schränken jedoch die Dimension des Phasenraumes ein, in dem sich das System bewegt.

Chaotisches oder nicht chaotisches Verhalten kann von einem Parameter abhängen, wobei eine kleine Änderung des Parameters den Wechsel von nicht chaotischem zu chaotischem Verhalten bewirken kann. Einen plötzlichen Wechsel des Verhaltens bei Änderung eines Paremeters nennt man eine Bifurkation.

3.5 Lyapunov Exponenten

Zur Beschreibung des Verhaltens von nichtlinearen bzw. chaotischen Systemen benutzt man Lyapunov Exponenten. Man verknüpft eine Änderung zu einem Zeitpunkt t_1 mit der aus dieser Änderung resultierenden Abweichung zu einem späteren Zeitpunkt t_2. Man nimmt an, dass

$$\delta x_{t2} \approx \delta x_{t1} \cdot e^{\lambda_i (t_2 - t_1)}$$

Dabei ist λ_i der Lyapunov Exponent. Ist er positiv, wachsen kleine Änderungen an, das System ist chaotisch. Ist er negativ, läuft das System einem Attraktor zu. Bei seltsamen Attraktoren ist mindestens ein Exponent positiv (für das Chaos) und einer negativ (zur Reduktion der Dimension).

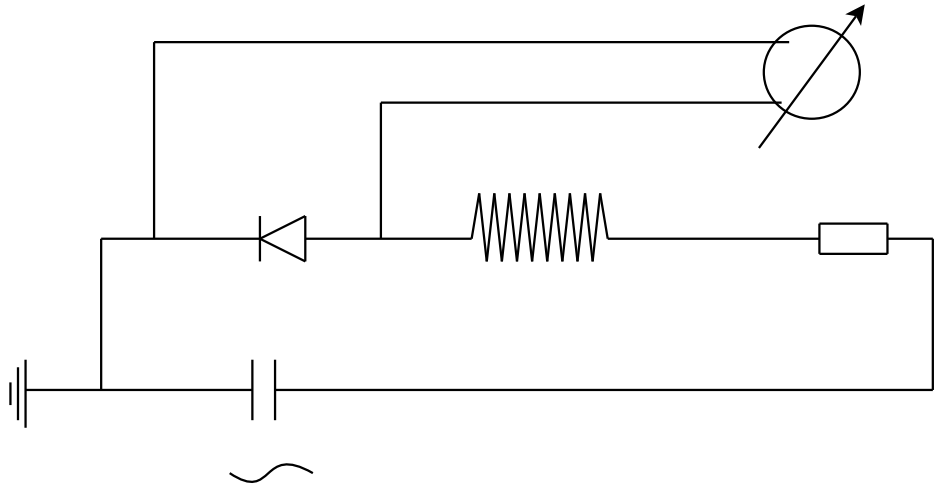
3.6 Fraktale Dimension

Zur Bestimmung der Dimension von seltsamen Attraktoren verwendet man die Hausdorff-Dimension. Diese beruht auf einer Überlegung zur Überdeckung einer Menge mit (Hyper-) Rechtecken. Uberdeckt man eine d-dimensionale Menge mit n Hyperquadraten mit der Seitenlänge r, so braucht man n^d Hyperrechtecke mit der Seitenlänge $r/2$. Man bestimmt so das d und nennt dies die fraktale Dimension. Bei seltsamen Attraktoren muss dies keine ganze Zahl sein.

4 Versuchsdurchführung

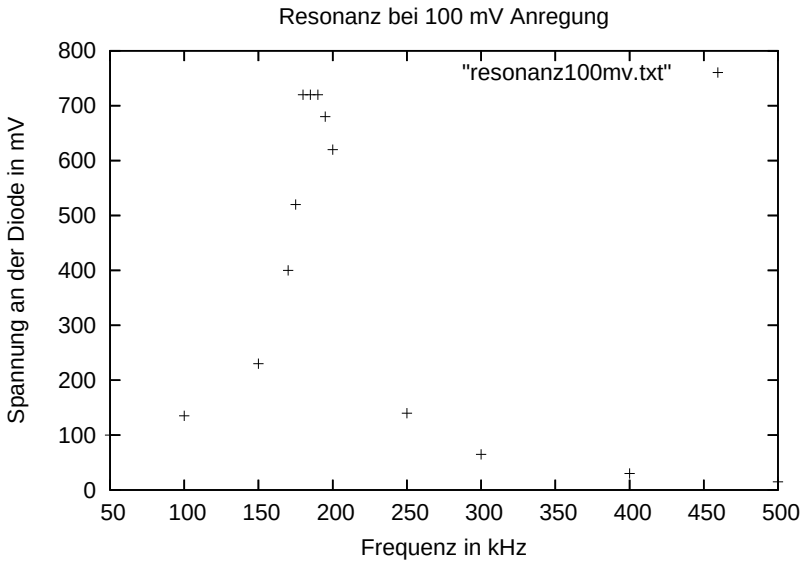
4.1 Versuchsaufbau

Es wird ein nichtlinearer Oszillator verwendet. In diesem ist eine Diode statt eines Kondensators eingebaut. Diese hat eine spannungsabhängige Kapazität für Spannungen unterhalb von 0.7 Volt.



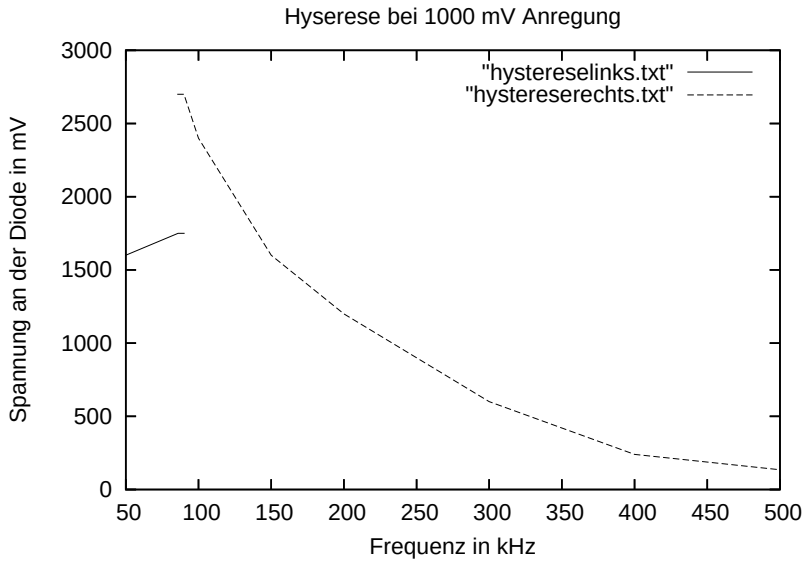
4.2 Vermessung von Resonanzkurven

Zunächst wurde die Resonanzkurve bei einer Anregungsspannung von 100 mV V_{SS} vermessen. Bei dieser Spannung wird ein weitgehend lineares Verhalten erwartet.

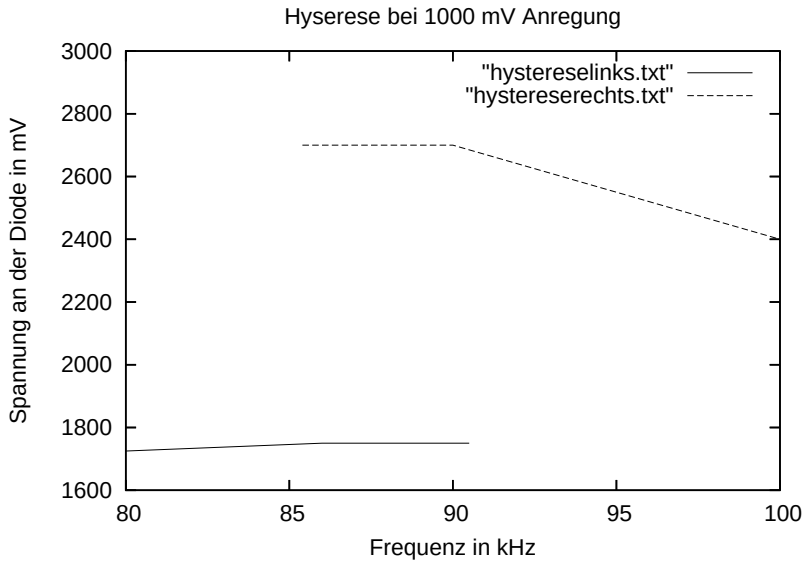


Die Resonanzfrequenz liegt bei etwa 190 kHz.

Für eine Anregung mit 1V ergibt sich die in der Vorbereitung bereits beschriebene Hysterese:



Hier der Ausschnitt mit der Hysterese vergrößert:



Die Sprünge sind bei 85,4 kHz und bei 90,64 kHz.

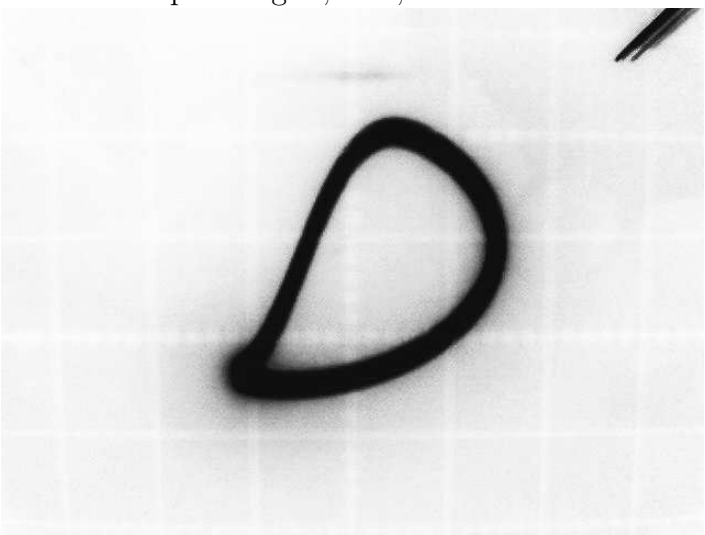
4.3 Betrachtung der Attraktoren im Phasenraum

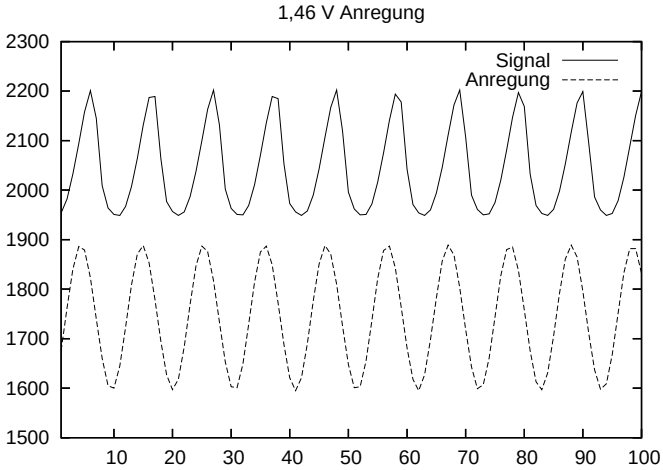
Bei einer Anregungsfrequenz von 95,6 kHz wurden die Attraktoren für verschiedene Anregungsspannungen auf den Oszilloskop betrachtet.

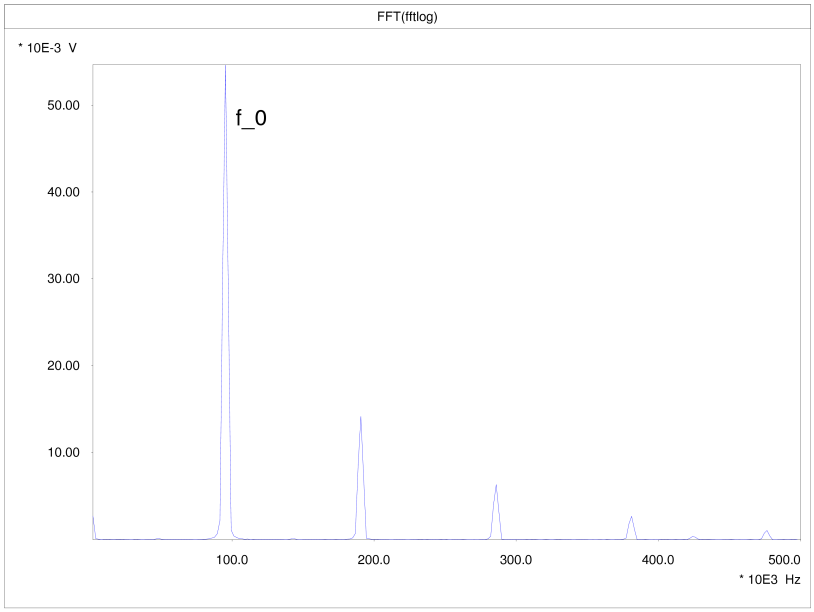
In den unterschiedlichen Spannungsbereichen beobachtet man Attraktoren, welche bei Erhöhung der angelegten Spannung ihre Periode zweimal verdoppeln, bevor sie chaotisch werden.

Parallel dazu wurde auf dem PC die Fouriertransformierte des Signals beobachtet. Deutlich zu sehen ist der Hauptpeak bei knapp 100 kHz und die subharmonischen, wobei die Frequenzen $f_0/4$, $f_0/2$ und $2 \cdot f_0/4$ als subharmonische auftauchen.

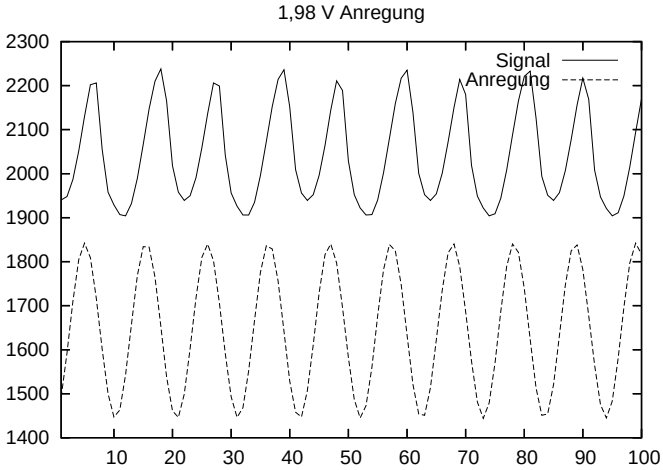
Spannung: 1,46 V, Periode: 1

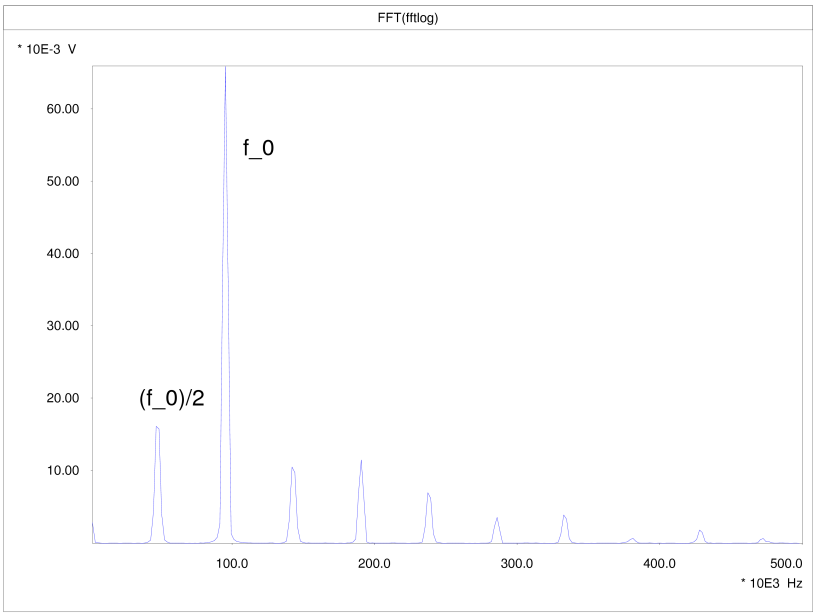




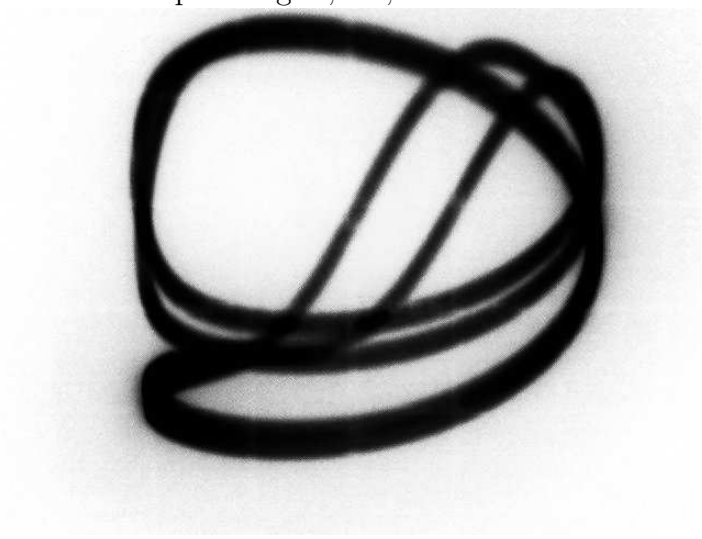


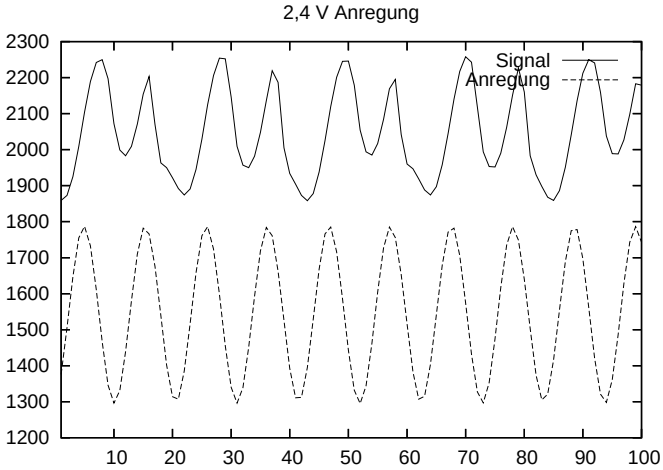
Spannung: 1,98 V, Periode: 2

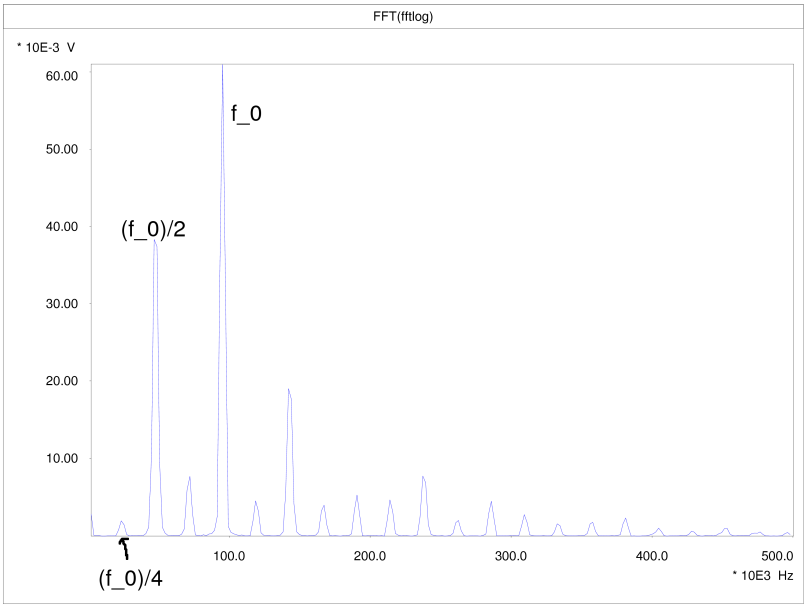




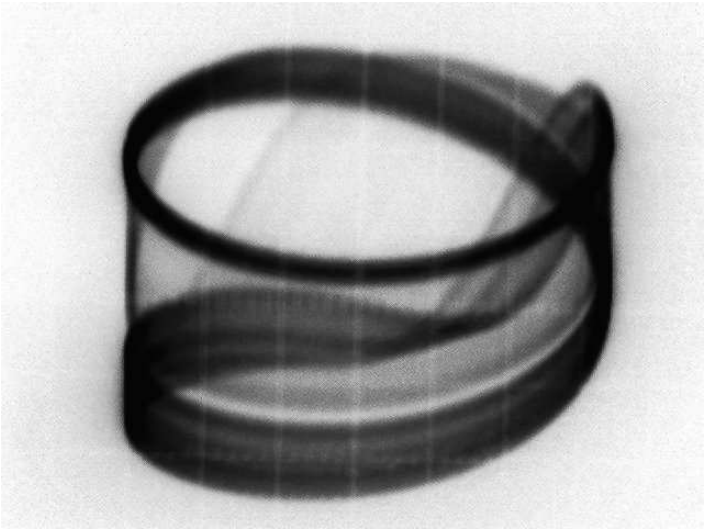
Spannung: 2,4 V, Periode: 4

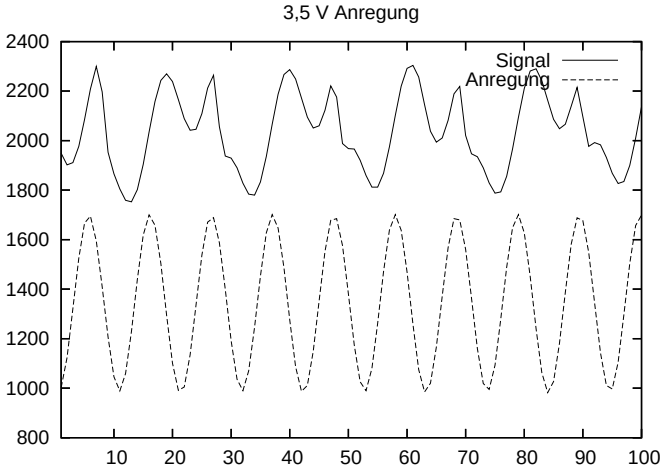


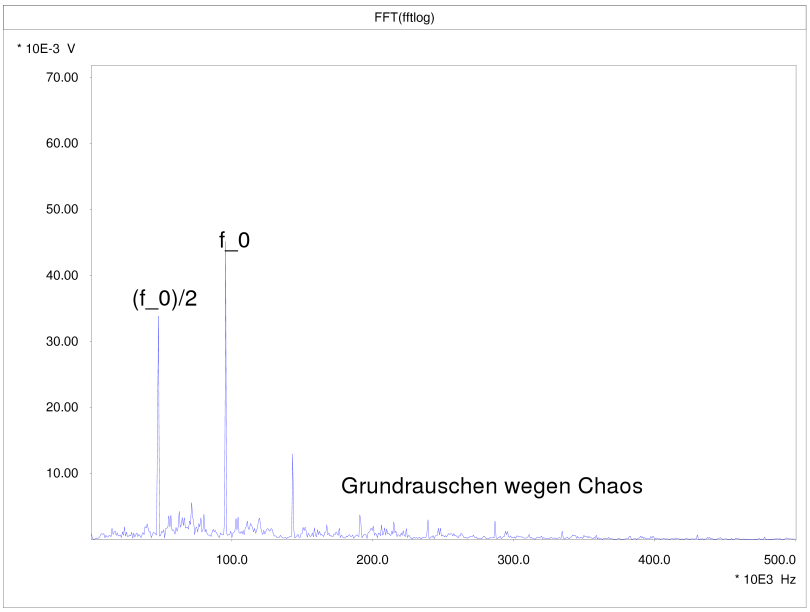


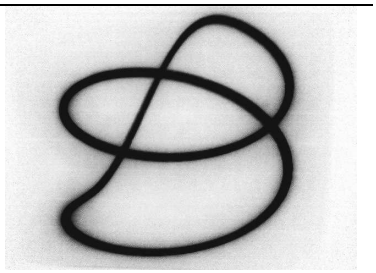
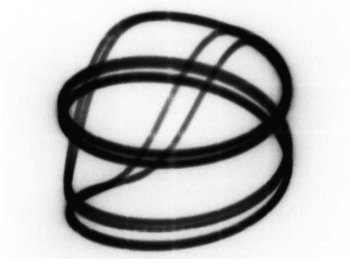
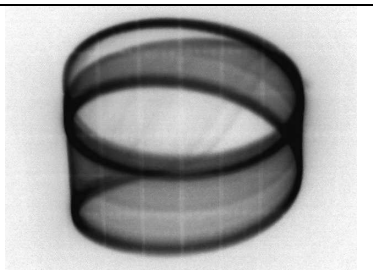


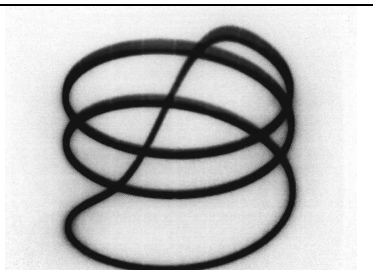
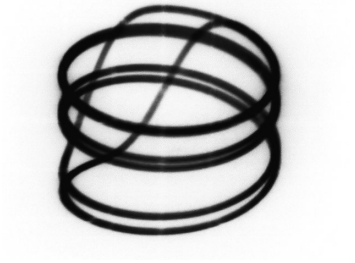
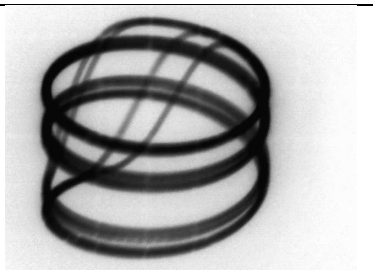
Spannung: 3,5 V, Periode: Chaos

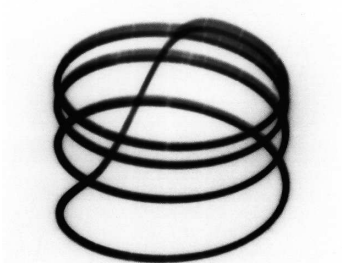
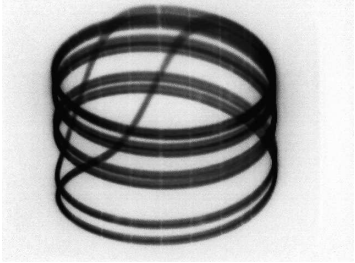
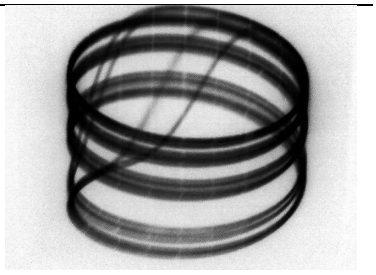
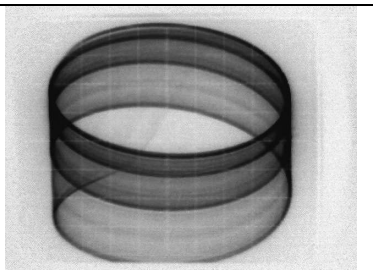






Spannung	Periode	Bild
4,2 V	2	
5,0 V	4	
5,2 V	8	
6,4 V	C	

Spannung	Periode	Bild
7,9 V	3	
9,6 V	6	
9,8 V	12	

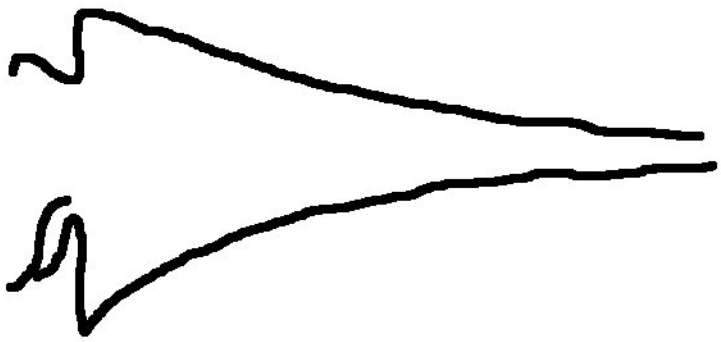
Spannung	Periode	Bild
14,2 V	4	
16,3 V	8	
16,6 V	16	
18,8 V	C	

4.4 Bifurkationsdiagramme und schnelle Resonanzmessung

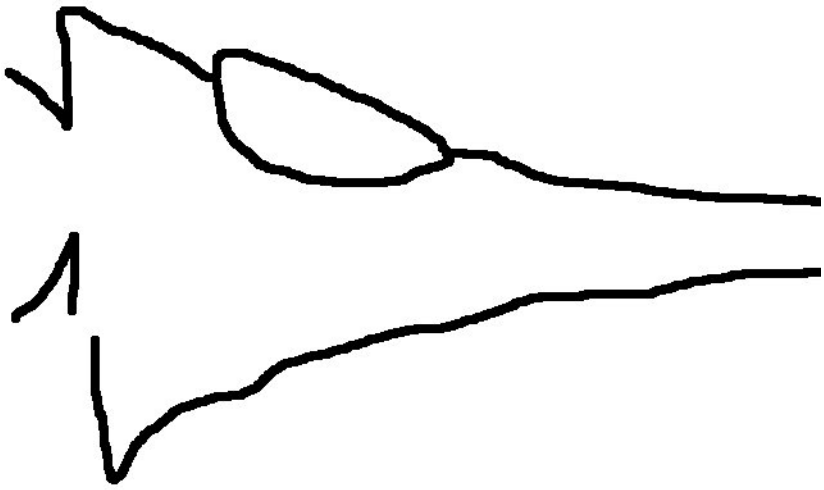
Der Funktionsgenerator, der die anregende Spannung geliefert hat, wurde in einen „sweep“-Modus gestellt, bei dem er den Frequenzbereich von 10 bis 500 kHz sehr schnell durchgefahren hat. Ein entsprechender Sweep-Ausgang des Frequenzgenerators wurde an den x-Eingang des Oszilloskops angeschlossen, so dass auf der x-Achse des Oszilloskops die angelegte Frequenz zu sehen war. Die Spannung an der Diode wurde auf die Y-Achse gelegt. Somit war auf dem Oszilloskop die Amplitude über die Frequenz aufgetragen, mit 50 kHz pro div.

Für eine angelegte Spannung von 0,194 V war das lineare Verhalten zu erkennen: Das Maximum der Amplitude lag bei knapp 200 kHz, bei ca. 100 kHz war ein kleines Maximum zu sehen. Eine Skizze des Bildes befindet sich im Versuchsprotokoll.

Bei einer angelegten Spannung von 0,98 V verschob sich die Resonanzfrequenz hin zu 100 kHz. Es zeigte sich der schon vorher beobachtete Sprung bei knapp 100 kHz. Die Einhüllende des Signales ist hier gezeigt:



Bei einer Erhöhung auf 1,14 V Anregungsspannung trat im Frequenzbereich um 250 kHz eine Periodenverdopplung auf. Dies machte sich als Ausbildung einer „Blase“ bemerkbar:



4.5 Bifurkationsdiagramm und Phasendiagramm

Mit diesem Aufbau wurde auch ein Phasendiagramm aufgenommen. Dazu wurde der Trigger-Ausgang des Funktionsgenerators mit einem Pulser verbunden, welcher wiederum an den Z-Eingang des Oszilloskops angeschlossen wurde. Damit wurden auf dem Oszilloskop immer die Punkte zu konstanter Phasenlage des Anregungssignales sichtbar. Auf dem Oszilloskop war ein Bifurkationsdiagramm sichtbar. Daraus haben wir die Perioden für unterschiedliche Anregungsspannungen abgelesen.

Das Phasendiagramm befindet sich im Anhang. Im Phasendiagramm sind auch die bei 95 kHz aufgenommenen Punkte eingezeichnet. Die Beobachtungen bei 95 kHz aus Aufgabe 3 bei der Betrachtung der Attraktoren stimmen gut mit den Ergebnissen aus Aufgabe 4 bei der Betrachtung der Bifurkationsdiagramme überein. Nur waren bei der Betrachtung der Attraktoren noch einige Phasenverdopplungen zu sehen, welche im Bifurkationsdiagramm nicht sichtbar waren.

Im Phasendiagramm beobachtet man, dass für Frequenzen oberhalb von 450 kHz, also weit oberhalb aller Resonanzfrequenzen, das System der Anregungsfrequenz folgt und in einem stabilen Zustand mit der Periodendauer eins ist. Im Bereich um 400 kHz ist das System in einem stabilen Zustand mit der Periode zwei.

Im Bereich von 0 bis 350 kHz ist das System entweder chaotisch oder folgt Attraktoren mit Perioden zwischen zwei und sechs. Die Bereiche mit nicht chaotischen Attraktoren verschieben sich für steigende Anregungsamplitude hin zu kleineren Frequenzen, wie es für einen „weichen“ oszillator zu erwarten ist (siehe auch theoretische Grundlagen).

Impressum	
Autor:	Andreas Buhr, Karlstraße 18, D-63225 Langen
Satz:	LaTeX
E-Mail	andreas at andreasbuhr.de
Web	www.andreasbuhr.de